Lecture dirigée - Année 2021
Encadrant : Jérémy Martin

Principe d'incertitude et théorème de Logvinenko-Sereda

Par Samuel Chan-ashing et Bastien Lecluse

Résumé

Un principe d'incertitude est une propriété qui limite la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Le plus connu d'entre eux est le principe d'incertitude d'Heisenberg. Il existe cependant différents types de principe d'incertitude et l'un d'entre eux est donné par la notion de paire annulante.

Dans un premier temps, nous allons comprendre les notions de principe d'incertitude. Puis dans un second temps, nous allons étudier le théorème de Logvinenko-Sereda qui fournit une description exhaustive des paires annulantes (S, Σ) lorsque la partie Σ est bornée.

1. Introduction

1.1. Transformation de Fourier sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.
On rappelle que $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \|.\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})})$ est un espace de Banach et que $(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \langle \cdot | \cdot \rangle, \|.\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})})$ est une espace de Hilbert.
On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en l'infini ($\pm\infty$).

Définition 1. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathscr{F}(f) : y \longmapsto \widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x|y \rangle} \, \mathrm{d}x.$$

Sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathscr{F}(f) : y \longmapsto \widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x.$$

Remarque. Il existe plusieurs manière de définir la transformation de Fourier. Nous fixons celle-ci dans la suite de cet article.

Proposition 1. *L'application* $\mathscr{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est bien définie et :*

— $\mathscr{F}$ *est linéaire, i.e. :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \ : \quad \widehat{\lambda f + g} = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}.$$

— $\mathscr{F} : (\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d), \|.\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}) \longrightarrow (\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ *est continue avec :* $\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \quad |\widehat{f}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \qquad \Longrightarrow \qquad \|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}.$$

□

Proposition 2. *Soient $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f : x \longmapsto f(x-a)$. L'application $a \longmapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On utilise la densité des fonctions continues à support compact dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et le théorème de Heine sur un tel compact. □

Théorème 3 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors l'application $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, i.e. :*

$$\widehat{f} \text{ est continue} \qquad \text{et} \qquad \lim_{|x| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0.$$

L'application $\mathscr{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est alors bien définie.

Remarque. En particulier, pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est uniformément continue.

Démonstration. On ne démontre que le cas $d = 1$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{t} \in \mathbb{R}$.

$$|\widehat{f}(\widetilde{t}) - \widehat{f}(t)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{-i\widetilde{t}x} - e^{-itx}|\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \,:\, \lim_{\widetilde{t} \to t} |f(x)|\,|e^{-i\widetilde{t}x} - e^{-itx}| = 0.$$

On a $\forall x, t, \widetilde{t} \in \mathbb{R} : |f(x)|\,|e^{-i\widetilde{t}x} - e^{-itx}| \leqslant 2|f(x)|$ qui est intégrable, alors par théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\widetilde{t} \to t} \widehat{f}(\widetilde{t}) = \widehat{f}(t),$$

et $\widehat{f}$ est donc continue.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, utilisons le simple fait que $e^{i\pi} + 1 = 0$:

$$\widehat{f}(t) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-it(x+\pi/t)}\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{\pi}{t}\right) e^{-itx}\,\mathrm{d}x.$$

Donc $2\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{t}\right)\right) \mathrm{d}x$. Il vient :

$$2|\widehat{f}(t)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{t}\right)\right| \mathrm{d}x = \|f - \tau_{\pi/t} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})},$$

avec $\tau_{\pi/t} f : x \longmapsto f(x - \pi/t)$. Puisque f est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\|f - \tau_{\pi/t} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}$ converge vers 0 lorsque $[t \to \pm\infty]$, donc $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0$. □

Proposition 4 (Propriétés élémentaires). *: soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$.*

- *(translation) : la transformée de Fourier de l'opérateur de translation par a est :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathscr{F}(\tau_a f)(y) = e^{-i\langle a|y\rangle} \mathscr{F}(f)(y).$$

- *(modulation) :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathscr{F}(e^{i\langle y|a\rangle} f(y)) = \mathscr{F}(f)(y - a).$$

- *(dilatation) : la transformée de Fourier de l'opérateur de dilatation par $\lambda \in \mathbb{R}^*$:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\, \forall y \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathscr{F}(\mathrm{d}_\lambda f) = \lambda^{-1} \mathrm{d}_{\lambda^{-1}} \mathscr{F}(f) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}_\lambda f : x \longmapsto f(\lambda x).$$

- *(conjugaison) :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \,:\, \overline{\mathscr{F}(f)(-y)} = \mathscr{F}\left(\overline{f}\right)(y).$$

- *(conservation de la parité) : $\mathscr{F}$ conserve la parité, i.e. :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \,:\, f \text{ paire} \implies \widehat{f} \text{ paire}.$$

Exemples 1. Donnons quelques exemples fondamentaux.

— (Fonction porte) : on pose $\Pi = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$ sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\Pi}(x) = \frac{\sin(x/2)}{x/2} = \operatorname{sinc}(x/2).$$

On prolonge sinc par continuité en 0 en posant $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

— (Transformée de Fourier d'une gaussienne) : la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $G_\alpha : x \longmapsto e^{-\alpha x^2}$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \quad \widehat{G}_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times G_{1/4\alpha}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right).$$

Démonstration. — Preuve pour la fonction porte. On a pour tout $x \neq 0$:

$$\widehat{\Pi}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ixy}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{e^{-ixy}}{-ix}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{ix}\left[e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right] = \frac{2i\sin(x/2)}{ix} = \frac{\sin(x/2)}{x/2}.$$

— Preuve pour la gaussienne. Il est clair que G_α est intégrable, $\widehat{G_\alpha}$ est donc bien définie. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\widehat{G_\alpha}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ixy}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout réel x la fonction $y \longmapsto e^{-\alpha x^2}e^{-ixy}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $y \longmapsto -ixe^{-\alpha x^2}e^{-ixy}$. Cette dernière est dominée par la fonction $\phi : x \longmapsto |x|e^{-\alpha x^2}$. ϕ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, par théorème de dérivation sous l'intégrale G_α est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout réel y, on a

$$\left(\widehat{G_\alpha}\right)'(y) = -i\int_{\mathbb{R}} xe^{-\alpha x^2}e^{-ixy}\,\mathrm{d}x.$$

Or, par une intégration par parties on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} xe^{-\alpha x^2}e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \frac{-iy}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}e^{-ixy}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi pour tout y :

$$\left(\widehat{G_\alpha}\right)'(y) + \frac{y}{2\alpha}\widehat{G_\alpha}(y) = 0.$$

Comme $\widehat{G_\alpha}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\widehat{G_\alpha}$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) + \dfrac{t}{2\alpha}u(t) = 0, \\ u(0) = \sqrt{\pi/\alpha}. \end{cases}$$

Or l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction

$$u : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha}\right).$$

Ainsi pour tout réel y :

$$\widehat{G_\alpha}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right).$$

□

1.2. Convolution.

Définitions et propriétés de la convolution.

Définition 2. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications mesurables et définies presque partout. On dit qu'elles sont *convolables* si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$y \longmapsto f(y)g(x-y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Définition 3. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables positives. On définit le *produit de convolution de f et g* par :

$$(f * g) : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

définie de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$.

Remarque. On définit le produit de convolution sur $\mathbb{R}^d$ car c'est seul ouvert de $\mathbb{R}^d$ stable par translation.

Définition 4. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications convolables. On définit le produit de convolution de f et g dans $\mathbb{C}$ par :

$$(f * g) : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

définie de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque. Dans le cas positif, on ne demande pas que les deux fonctions soient convolables car on autorise l'intégrale à prendre une valeur infinie. Dans le cas complexe, on se force à prendre des fonctions convolables afin que l'intégrale soit bien définie.

Proposition 5. *La convolution de fonctions est commutative, bilinéaire et associative.*

Démonstration. — Commutativité : soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions convolables.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}^d \ : \quad (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)g(u)|(-1)^d|\ \mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable)} \\ &= (g * f)(x), \end{aligned}$$

donc $f * g = g * f$.

— Bilinéarité : par linéarité de l'intégrale c'est immédiat.

— Associativité : soient $f, g, h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. D'une part :

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(y)h(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(y-t)\ \mathrm{d}t \right) h(x-y)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
(f*(g*h))(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)(g*h)(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)h(x-t-y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(changement de variable)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-t)h(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(y-t)\,\mathrm{d}t\right) h(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Fubini-Lebesgue)} \\
&= ((f*g)*h)(x).
\end{aligned}$$

□

Remarque. Le produit de convolution régularise une fonction f en faisant une moyenne pondérée par g des valeurs de f en chaque point.

Proposition 6. *Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Si de plus, $\widehat{f}, \widehat{g}$ et $fg \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Démonstration. Ce théorème se démontre en remarquant que si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et en exploitant le théorème de Fubini. □

1.3. **Dérivation et formule d'inversion de Fourier.**

Tout d'abord, observons le lien entre régularité d'une fonction et décroissance de sa transformée de Fourier.

Proposition 7 (Transformée d'une dérivée)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f, \partial_j f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$. Alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathbb{R}^d$,*

$$\widehat{\partial_j f}(x) = (ix_j)\widehat{f}(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^k_{pm}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f, \partial_j f, \ldots, \partial_j^k f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\partial_j^k f}(x) = (ix_j)^k \widehat{f}(x).$$

Corollaire 8. *Cas $d = 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R})$ telle que $f, f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Alors pour tout réel x :*

$$\widehat{f'}(x) = (ix)\widehat{f}(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^k_{pm}(\mathbb{R})$ telle que $f, f', \ldots, f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors pour tout réel x :

$$\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k \widehat{f}(x).$$

Démonstration. Comme $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{(f')}$ est bien définie et pour tout réel x :

$$\widehat{f'}(x) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que $\left[f(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors comme $f \in \mathcal{C}^1_{pm}$ et $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, on a :

$$A \;:=\; \lim_{x \to +\infty} f(x) \;=\; f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t \;<\; +\infty \qquad \text{car } f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}).$$

Si $|A| > 0$, alors : il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant x_0 : |A - f(x)| \leqslant \dfrac{|A|}{2}$ et donc : $f(x) \geqslant \dfrac{|A|}{2}$ pour tout $x \geqslant x_0$. Dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;\geqslant\; \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{|A|}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; +\infty.$$

Cela est absurde car $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $|A| = 0$. De même en $-\infty$.
Finalement, par intégration par parties :

$$\widehat{f'}(x) \;=\; -\int_{\mathbb{R}} f(t)(-ix)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \;=\; (ix)\widehat{f}(x).$$

□

Remarque. Le résultat précédent montre un lien entre régularité d'une fonction et décroissance de sa transformée de Fourier. En effet, plus f est régulière avec des dérivées intégrables, plus $\widehat{f}$ décroît rapidement vers 0 en l'infini.

Corollaire 9. *Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $f, f', f'' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Comme l'une des deux fonctions est à support compact, le résultat s'obtient aisément par intégration par parties. □

Remarque. Le résultat suivant montre un lien "inverse" entre décroissance d'une fonction et régularité de sa transformée de Fourier. Il énonce que plus f décroît rapidement vers 0 en l'infini, plus $\widehat{f}$ est dérivable.

Proposition 10 (Dérivée d'une transformée)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $x \longmapsto xf(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et tout x dans $\mathbb{R}^d$,*

$$i\partial_j \widehat{f}(x) \;=\; \widehat{x_j f}(x).$$

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (i.e. : pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $\partial_j f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$), alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et tout x dans $\mathbb{R}^d$:

$$\widehat{\partial_j f}(x) \;=\; x_j \widehat{f}(x).$$

En particulier : $\left(x \longmapsto x\widehat{f}(x)\right) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 11. *Cas $d = 1$. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $x \longmapsto xf(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et en posant $g : x \longmapsto (-ix)f(x)$ on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$(\,\widehat{f}\,)'(x) \;=\; \widehat{g}(x).$$

Démonstration. Cas $d = 1$. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $s \neq t$, alors :

$$\frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(t)}{s - t} \;=\; \frac{1}{s - t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixs}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}x\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\varphi(x, s - t)\,\mathrm{d}x,$$

avec $\varphi(x, u) := \dfrac{e^{-ixu} - 1}{u}$ pour tout $u \neq 0$.

Or $\forall\, x, u \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x, u)| \leqslant |x|$, $\lim_{x \to 0} \varphi(x, u) = -ix$, et par hypothèse $g : x \longmapsto -ixf(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, donc par théorème de convergence dominée, lorsque $[s \to t]$, on a : $(\,\widehat{f}\,)'(t) = -i\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ixt}\mathrm{d}x$.

□

On s'intéresse maintenant au théorème d'inversion de Fourier. Pour le démontrer, il est commode de disposer d'une fonction positive H dont la transformée de Fourier est positive et d'intégrale facilement calculable.

Exemple 2. On pose $\mathrm{H} : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-|x|} \geqslant 0$ et $h_\lambda : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t) e^{itx} \,\mathrm{d}t$ pour $\lambda > 0$. Soit $\lambda > 0$. Alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ : \quad h_\lambda(x) \ = \ \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \qquad h_\lambda \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) \,\mathrm{d}x \ = \ 1.$$

De plus : $0 \leqslant H(t) \leqslant 1$ et $\mathrm{H}(\lambda t) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 1$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
h_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} e^{itx} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(ix-\lambda)} \,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 e^{t(ix+\lambda)} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(ix-\lambda)} \,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t(ix+\lambda)} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{t(ix-\lambda)}}{ix - \lambda} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{-e^{-t(ix-\lambda)}}{ix + \lambda} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda - ix} + \frac{1}{ix + \lambda}.
\end{aligned}$$

D'où : pour tout réel x, $h_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) \,\mathrm{d}x \ = \ 1$.

Proposition 12. *Soit $\lambda > 0$.*

(i) Pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ : \quad (f * h_\lambda)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t) \widehat{f}(t) e^{ixt} \,\mathrm{d}t.$$

(ii) Pour tout $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ continue en $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(a) \ = \ g(a)$.

(iii) Soient $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, alors $\lim_{\lambda \to 0} \|(f * h_\lambda) - f\|_p \ = \ 0$.

Démonstration. (i) Théorème de Fubini.

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout $\lambda > 0$,

$$h_\lambda(a) \ = \ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t) e^{ita} \,\mathrm{d}t \ = \ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda} \mathrm{H}(u) e^{i\frac{a}{\lambda}u} \,\mathrm{d}u \ = \ \frac{1}{\lambda} h_\lambda\left(\frac{a}{\lambda}\right) \qquad (u := \lambda t).$$

Alors comme h_λ est d'intégrale 1 pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(g * h_\lambda)(a) - g(a) &= \int_{\mathbb{R}} (g(a-y) - g(a)) h_\lambda(y) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} (g(a-y) - g(a)) \frac{1}{\lambda} h_\lambda\left(\frac{y}{\lambda}\right) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} (g(a - \lambda s) - g(a)) h_\lambda(s) \,\mathrm{d}s \qquad (s := y/\lambda).
\end{aligned}$$

Or :

$$(g(a-\lambda s)-g(a))h_\lambda(s) \leqslant 2\|g\|_\infty h_\lambda(s) \quad \text{intégrable}$$

$$\text{et} \qquad \forall\, s\ :\quad \lim_{\lambda\to 0^+}(g(a-\lambda s)-g(a))h_\lambda(s) = 0,$$

car g est continue en a. On conclut par convergence dominée.

(iii) Soient $\lambda > 0$, $p \geqslant 1$ et q son conjugué.
Puisque $h_\lambda \in \mathrm{L}^q$, la fonction $(f * h_\lambda)$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier (on vérifie facilement qu'elle est même continue). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(f*h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))h_\lambda(y)\,\mathrm{d}y.$$

Puis par inégalité de Jensen, la fonction $u \longmapsto u^p$ étant convexe :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}(f(x-y)-f(x))h_\lambda(y)\,\mathrm{d}y\right|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p h_\lambda(y)^p\,\mathrm{d}y$$

$$\iff \quad |(f*h_\lambda)(x)-f(x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p h_\lambda(y)^p\,\mathrm{d}y.$$

On intègre par rapport à x et on applique le théorème de Fubini :

$$\|(f*h_\lambda)-f\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_p^p\, h_\lambda(y)^p\,\mathrm{d}y = (g*h_\lambda)(0),$$

avec $g : y \longmapsto \|\tau_y f - f\|_p^p\, h_\lambda(y)^{p-1}$ qui est alors bornée, continue et qui vérifie $g(0)=0$. Par application du point (ii) précédent, le membre de droite tend vers donc 0.

□

Théorème 13 (Inversion de Fourier)**.** *Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}\ :\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)e^{i\langle x|y\rangle}\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le point (i) de la proposition précédente :

$$(f*h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall\, t\ :\ |\mathrm{H}(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}| \leqslant |\widehat{f}(t)| \quad \text{avec } \widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}).$$

On pose $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\left(\mathrm{H}(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}\right) = \widehat{f}(t)e^{ixt}$.

Par convergence dominée, $(f*h_\lambda)(x)$ tend vers $g(x)$ lorsque $[\lambda \to 0^+]$.
On rappelle le lemme suivant, utilisé dans la preuve classique du théorème de Riesz-Fischer :

Lemme 14. *Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p(\mu)$ avec μ de mesure positive possédant une limite f. Il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ qui converge ponctuellement presque partout vers f.*

Par le lemme et par le point (iii) de la proposition précédente, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ telle que $\lambda_n \to 0$ et $\displaystyle\lim_{n+\infty}(f*h_{\lambda_n})(x) = f(x)$ presque partout. Alors $f(x) = g(x)$ presque partout. □

Corollaire 15. *La transformée de Fourier est injective sur $\{f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\ :\ \widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\}$, i.e. que pour $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telles que $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$\widehat{f} = \widehat{g} \qquad \iff \qquad f = g \quad \text{p.p.}$$

En particulier : $\widehat{f} = 0 \iff f = 0$.

Démonstration. Trivial par inversion de Fourier. □

Remarque. L'intérêt principal du théorème d'inversion ponctuelle est de faire l'analogie avec les séries de Fourier.

1.4. Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Dans tout ce paragraphe on note $\mathrm{L}^1 := \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2 := \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Nous allons étendre la notion de transformée de Fourier à l'espace L^2 sachant que cet ensemble n'est pas inclus dans L^1. La formule est correctement définie si $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. De plus, si $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, alors $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2$ et on a $\|f\|_{\mathrm{L}^2} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}$. Cette isométrie de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ dans L^2 se prolonge par densité en une isométrie de L^2 sur L^2.

Lemme 16. $(\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$ *est un sous-espace dense de* $(\mathrm{L}^2, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{L}^2$, alors en posant $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$f_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2 \qquad \text{et} \qquad \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

□

Théorème 17 (Plancherel). *À chaque fonction f de L^2, on peut associer une application $\widehat{f}$ de L^2 telle que :*

(i) Si $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

(ii) Si $f \in \mathrm{L}^2$, on a : $\|f\|_{\mathrm{L}^2} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}$.

(iii) L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est une isométrie linéaire bijective d'espaces de Hilbert de L^2 sur L^2, i.e. :

$$\langle \widehat{f} \,|\, \widehat{g} \rangle = \langle f | g \rangle.$$

(iv) Entre f et $\widehat{f}$, il existe les relations symétriques suivantes :
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour $\varphi_a : y \longmapsto \int_{-a}^{a} e^{-ixy} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\psi_a : y \longmapsto \int_{-a}^{a} e^{ixy} \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x$, on a :

$$\lim_{a \to +\infty} \|\varphi_a - f\|_{\mathrm{L}^2} = \lim_{a \to +\infty} \|\psi_a - \widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2} = 0.$$

Démonstration. — (i), (ii)

(1) Soit $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. Montrons que $\|f\|_{\mathrm{L}^2} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}$.

On pose $\widetilde{f} : x \longmapsto \overline{f(-x)}$ ainsi que $g = f * \widetilde{f}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}y = \langle \tau_{-x} f, f \rangle,$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien sur L^2.
L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_{-x} f \in \mathrm{L}^2$ est continue, donc g est continue par continuité du produit scalaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|g(x)| \leqslant \|\tau_{-x} f\|_{\mathrm{L}^2} \cdot \|f\|_{\mathrm{L}^2} = \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2$.
Alors g est bornée. De plus, comme f et $\widetilde{f}$ appartiennent à L^1, alors $g \in \mathrm{L}^1$.
Soit $\lambda > 0$, d'après le point (i) de la proposition 16, on a :

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)\widehat{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, g est bornée et continue en 0, donc par le point (ii) de la proposition 16 :

$$\lim_{\lambda \to 0^+} (g * h_\lambda)(0) = g(0) = \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Par la proposition 7,

$$\widehat{g} = \widehat{(f * \widetilde{f})} = \widehat{f} \times \widehat{(\widetilde{f})} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)},$$

donc $\widehat{(\widetilde{f})} = \overline{(\widehat{f})}$ et $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \geqslant 0$.

On applique le théorème de convergence monotone à la fonction $\lambda \longmapsto \mathrm{H}(\lambda t)$ qui croît vers 1 lorsque $[\lambda \to 0]$:

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \lim_{\lambda \to 0^+} (g * h_\lambda)(0) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)\widehat{g}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\, \mathrm{d}t = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Ainsi : $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2$ et $\|f\|_{\mathrm{L}^2} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}$.

(2) On note $\mathrm{Y} = \left\{\widehat{f},\ f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2\right\}$. D'après (1) : $\mathrm{Y} \subset \mathrm{L}^2$. Montrons que Y est dense dans L^2, *i.e.* que $\mathrm{Y}^\perp = \{0\}$.
Pour tout réel α et tout $\lambda > 0$, les fonctions $x \longmapsto e^{i\alpha x}\mathrm{H}(\lambda x)$ sont dans $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. Leur transformée de Fourier $h_\lambda(\alpha - t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}\mathrm{H}(\lambda x)e^{-ixt}\, \mathrm{d}x$ appartient donc à Y.
Si $\omega \in \mathrm{L}^2$ et $\omega \in \mathrm{Y}^\perp$, on a pour tout réel α :

$$(\overline{\omega} * h_\lambda)(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha - t)\, \overline{\omega}(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Par le point (*iii*) de la proposition 16, comme $\omega \in \mathrm{L}^2$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \|(\overline{\omega} * h_\lambda) - \overline{\omega}\|_{\mathrm{L}^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}^\perp = \{0\}.$$

D'où Y dense dans L^2.

(3) On note provisoirement $\Phi(f)$ pour désigner $\widehat{f}$. L'application Φ est une isométrie pour $\|.\|_{\mathrm{L}^2}$ de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ (qui est dense dans L^2) dans $f(\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2) = \mathrm{Y}$ (qui est aussi dense dans L^2). Démontrons un lemme.

Lemme 18. *Supposons que :*
— X, Y *soient des espaces métriques avec* X *complet.*
— $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *est continue.*
— X *possède un sous ensemble dense* X_0 *sur lequel* f *est une isométrie.*
— $f(\mathrm{X}_0)$ *est dense dans* Y.
Alors f *est une isométrie de* X *sur* Y.

Démonstration. Puisque X_0 est dense dans X, que f soit une isométrie sur X est conséquence de sa continuité. Soit $y \in \mathrm{Y}$. Puisque $f(\mathrm{X}_0)$ est dense dans Y, il existe $(x_n)_n \in \mathrm{X}_0^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$.
$(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y. Comme f est une isométrie sur X_0, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. X étant complet, $x_n \to x$, où $x \in \mathrm{X}$ et par continuité de f : $f(x) = y$. □

Par ce lemme, Φ se prolonge en une isométrie $\widetilde{\Phi}$ de L^2 sur L^2. En notant $\widehat{f}$ pour désigner $\widetilde{\Phi}(f)$, on en déduit les points (*i*) et (*ii*) du théorème de Plancherel.

— (iii) Par le lemme, la densité préserve le caractère bijectif de f car $(\mathrm{L}^2, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$ est complet. Cette propriété se déduit donc directement de la preuve des points $(i), (ii)$ du théorème de Plancherel.

— (iv) Soient $f \in \mathrm{L}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\chi_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$, alors : $\chi_a f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ et $\varphi_a = \widehat{\chi_a f}$. Puisque $\|f - \chi_a f\|_{\mathrm{L}^2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$, on déduit du point (ii) du théorème de Plancherel que :

$$\|\widehat{f} - \varphi_a\|_{\mathrm{L}^2} = \|(\widehat{f - \chi_a f})\|_{\mathrm{L}^2} = \|f - \chi_a f\|_{\mathrm{L}^2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0.$$

De même pour ψ_a.

$\square$

Remarque. On obtient alors un prolongement de la transformée de Fourier de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ qui est une isométrie linéaire bijective d'espaces de Hilbert.

Corollaire 19. *Lorsque $f \in \mathrm{L}^2$ tel que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$, on a alors :*

$$\textit{pour presque tout } x : \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt}\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Application directe du point (iv) du théorème de Fourier-Plancherel. $\square$

Remarque. Si $f \in \mathrm{L}^1$, $\widehat{f}(t)$ définie sans ambiguïté en tout réel t par $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt}\, \mathrm{d}x$.
Si $f \in \mathrm{L}^2$, $\widehat{f}(t)$ se définit comme un élément de l'espace de Hilbert, mais en tant que fonction ponctuelle de t on ne dispose que d'une définition pour presque tout t.

Exemple 3. On a $f : x \longmapsto \mathrm{sinc}(x/2) \in \mathrm{L}^2 \backslash \mathrm{L}^1$ et $\widehat{f} = \chi_{[-1/2,1/2]}$.

Remarque. La transformée de Fourier se généralise dans l'espace de Schwartz. Dans la suite, nous l'utiliserons parfois implicitement.

2. Principe d'incertitude d'Heisenberg

Un principe d'incertitude est une propriété qui limite la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Son énoncé peut être formulé de la manière suivante :

Il est impossible qu'une fonction (ou distribution) et sa transformée de Fourier soient toutes les deux concentrées dans une petite région de l'espace.

Remarque. Ce principe est général et en mathématiques il existe différents types de principe d'incertitude. Le plus connu d'entre eux est le principe d'incertitude d'Heisenberg.

2.1. Principe d'incertitude d'Heisenberg.

Théorème 20 (Principe d'incertitude d'Heisenberg)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in [\![1, d]\!]$:*

$$\left(\int (x_j - a)^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int (y_j - b)^2 |\widehat{f}(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right) \geqslant \frac{1}{4} \|f\|^4_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On a égalité si et seulement si f est de la forme

$$f(x) = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) e^{-ibx_j} e^{-\alpha(x_j - a)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

où g est une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})$, $\alpha > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque. Ici, la concentration d'une fonction f et de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est mesurée par sa variance. Ces concentrations sont limitées dans l'espace par $\frac{1}{4}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$. On remarque en particulier que si f et $\widehat{f}$ sont trop concentrées autour de leur moyenne, alors f est nécessairement nulle. Cela vient du fait que plus f décroît vite, moins sa transformée de Fourier décroît vite (la vitesse de décroissance de f est limitée par le cas d'égalité de ce principe, à savoir la gaussienne).

Corollaire 21 (Principe d'incertitude d'Heisenberg unidimensionnel)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on note :*

$$\mathrm{V}(f) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\widehat{f}) = \inf_{b \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (y - b)^2 |\widehat{f}(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right).$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg à une dimension s'énonce alors comme suit :

$$\mathrm{V}(f) \cdot \mathrm{V}(\widehat{f}) \geqslant \frac{1}{4} \|f\|^4_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $j \in [\![1, d]\!]$.
Supposons que $\left(\int (x_j - a)^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right), \left(\int (y_j - b)^2 |\widehat{f}(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right) < +\infty$, sinon l'inégalité est triviale.

(1) Cas où : $a = b = 0$ et $d = 1$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1$ et $f, f' \in \mathrm{L}^1$.
Par transformation d'une dérivation :

$$\forall\, y \in \mathbb{R} : \quad \widehat{f'}(y) = (iy)\widehat{f}(y).$$

On a $\left(\int_{\mathbb{R}} y^2 |\widehat{f}(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right) < +\infty$, donc $\widehat{(f')} \in \mathrm{L}^2$. Par le théorème de Plancherel et comme $f \longmapsto \widehat{f}$ est un isomorphisme de L^2 sur L^2, on en déduit que $f' \in \mathrm{L}^2$.

De plus, on remarque que la dérivée de $|f|^2 = f\overline{f}$ est $2\,\mathrm{Re}(f\overline{f'})$ et donc par intégration par partie, on a pour $c < d \in \mathbb{R}$:

$$\int_c^d |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \;=\; \big[x|f(x)|^2\big]_c^d - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_c^d x f(x)\overline{f'(x)} \, \mathrm{d}x\right).$$

Par le corollaire 11 on a : $f, xf, f' \in \mathrm{L}^2$, donc les intégrales dans l'égalité précédente sont convergentes lorsque $[d \to +\infty]$. Alors $\ell := \lim\limits_{d\to+\infty} d|f(d)|^2 \in \mathbb{R}$ et ℓ est positive.
Si $\ell > 0$, alors $|f(x)|^2 \sim_{x\to+\infty} \ell/x$ et f ne serait donc pas dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De même pour $[c \to -\infty]$. Ainsi,

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \;=\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \;=\; -2\,\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} \, \mathrm{d}x\right),$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \;&\leqslant\; 2\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f'(x)|\,|f(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant\; 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Enfin par l'identité de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(y)|^2 \, \mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}} y^2|\widehat{f}(y)|^2 \, \mathrm{d}y.$$

D'où le résultat.

(2) Le cas général sur $\mathbb{R}$ est trivial en appliquant une translation et une modulation adéquates à la fonction f, de sorte à appliquer le résultat précédent.

(3) Cas d'égalité : utiliser la transformée de Fourier d'une gaussienne.

La preuve dans le cas où d est quelconque est bien plus délicate. Cela provient du caractère $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ de la dérivation $\partial_j f$ qui ne garantie pas la continuité de f. Un premier travail serait de considérer f régulière et à décroissance rapide puis utiliser un argument de densité. (cf. Benedetto (1990). Uncertainty principle inequalities and spectrum estimation. Recent Advances in Fourier Analysis and Its Applications (J. S. Bymes and J. L. Byrnes, eds.). Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. MR 91i :94010 - Appendice A). □

2.2. **Application à la mécanique quantique.**

Historiquement, le principe d'incertitude fut énoncé en 1927 par Heisenberg. Il a montré une propriété fondamentale de la mécanique quantique qui dit qu'il est impossible de mesurer, avec précision, à la fois la position et la vitesse d'une particule. En notant Δx l'incertitude sur la position et Δp l'incertitude sur la vitesse, l'inégalité de Heisenberg est alors donnée par :

$$\Delta x \cdot \Delta p \;\geqslant\; \frac{\hbar}{2},$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Nous allons démontrer ce résultat.

On se place dans le cadre de la mécanique quantique. L'état d'une particule ponctuelle est décrit par une fonction d'onde $\psi(x,t)$ (on se limitera ici au cas à une dimension).

Description probabiliste : une mesure de la position de la particule donne un résultat noté x à dx près avec la probabilité :

$$\mathrm{d}P \;=\; |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x,$$

où $|\psi(x,t)|^2$ représente donc la densité de probabilité (on a en particulier $\|\psi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 1$).

Si la particule est libre, *i.e.* soumise à aucun potentiel ni à aucune mesure, l'évolution de $\psi(x,t)$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \;=\; i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Dans cette section en particulier, on définit la transformée de Fourier de ψ par :

$$\widehat{\psi}(p) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-ixp/\hbar}\, \mathrm{d}x,$$

On définit la valeur moyenne de la position et l'écart quadratique moyen qui mesure la dispersion des mesures autour de la valeur moyenne :

$$< x >= \int_{\mathbb{R}} x|\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \Delta x \;=\; \sqrt{< x^2 > - < x >^2}.$$

On définit de même la valeur moyenne de l'impulsion et l'incertitude statistique pour $p := p_x$ la composante suivant $\vec{u}_x$ de la quantité de mouvement :

$$< p >= \int_{\mathbb{R}} p|\widehat{\psi}(p)|^2 \,\mathrm{d}p \qquad \text{et} \qquad \Delta p \;=\; \sqrt{< p^2 > - < p >^2}.$$

Alors en particulier :

$$(\Delta x)^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} (x - < x >)^2\, |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad (\Delta p)^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} (p - < p >)^2\, |\widehat{\psi}(p)|^2 \,\mathrm{d}p.$$

Comme $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, alors en notant :

$$\mathrm{V}(\psi) \;=\; \inf_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\widehat{\psi}) \;=\; \inf_{b\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (p-b)^2 |\widehat{\psi}(p)|^2 \,\mathrm{d}p \right),$$

on a par principe d'incertitude d'Heisenberg unidimensionnel :

$$\mathrm{V}(\psi)\cdot \mathrm{V}(\widehat{\psi}) \;\geqslant\; \frac{\hbar^2}{4}\|\psi\|^4_{L^2(\mathbb{R})} \;=\; \frac{\hbar^2}{4}.$$

Or par définition :

$$(\Delta x)^2 \;\geqslant\; \mathrm{V}(\psi) \qquad \text{et} \qquad (\Delta p)^2 \;\geqslant\; \mathrm{V}(\widehat{\psi}),$$

alors on obtient bien finalement :

$$\Delta x \cdot \Delta p \;\geqslant\; \sqrt{\mathrm{V}(\psi)\cdot \mathrm{V}(\widehat{\psi})} \;\geqslant\; \frac{\hbar}{2}.$$

Remarque. Ce principe universel en physique existe aussi en traitement du signal dès lors que la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ intervient et autorise donc une analogie avec les phénomènes ondulatoires. Dans cette correspondance, la position devient le temps et la vitesse devient la fréquence.

3. Paire annulantes et ensembles épais

Nous allons maintenant voir un type de principe d'incertitude donné par la notion de paire annulante.

3.1. Support et spectre d'une fonction.

Définition 5. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On pose $\mathcal{O}(f)$ l'ensemble des ouverts $\mathrm{O} \subset \mathrm{D}$ tels que $f = 0$ p.p. sur O. On appelle *support* de f l'ensemble

$$\operatorname{supp}(f) \ := \ \left(\bigcup_{\mathrm{O} \in \mathcal{O}(f)} \mathrm{O} \right)^c .$$

Remarques. Soit $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
- Si f est la fonction nulle, alors $\operatorname{supp}(f) = \emptyset$.
- L'ensemble $\operatorname{supp}(f)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.
- Si $\operatorname{supp}(f) \subset \mathrm{S}$, alors pour presque tout x dans $\mathbb{R}^d$: $f(x) \ = \ f(x)\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(x)$.

Définition 6. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On appelle *spectre* de f le support de $\widehat{f}$, et on pose :

$$\operatorname{spec}(f) \ := \ \operatorname{supp}(\widehat{f}).$$

Proposition 22. *Pour toutes applications $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ convolables :*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Si de plus f ou g est à support compact :

$$\overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)} \ = \ \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Démonstration. On pose $\widetilde{f} = f \cdot \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(f)}$ et $\widetilde{g} = g \cdot \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(g)}$. Alors, $f = \widetilde{f}$ p.p. et $g = \widetilde{g}$ p.p. Ainsi, $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\widetilde{f})$, $\operatorname{supp}(g) = \operatorname{supp}(\widetilde{g})$ et $f * g = \widetilde{f} * \widetilde{g}$ p.p. Finalement $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont donc nulles partout sur le complémentaire de leur support.
Soit $x \notin \operatorname{supp}(\widetilde{f}) + \operatorname{supp}(\widetilde{g})$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$: $x - y \notin \operatorname{supp}(\widetilde{f})$ ou $y \notin \operatorname{supp}(\widetilde{g})$. Donc :

$$(\widetilde{f} * \widetilde{g})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(y)\widetilde{g}(x-y) \, \mathrm{d}y = 0.$$

L'application $\widetilde{f} * \widetilde{g}$ est nulle sur $\left(\operatorname{supp}(\widetilde{f}) + \operatorname{supp}(\widetilde{g})\right)^c$ donc sur $\left(\overline{\operatorname{supp}(\widetilde{f}) + \operatorname{supp}(\widetilde{g})}\right)^c$. Et donc finalement :

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

□

3.2. Définition et propriétés des paires annulantes.

Définition 7 (Paires annulantes)**.** Soient S et Σ deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$.

- On dit que le couple (S, Σ) forme une *paire faiblement annulante* (ou *paire faiblement annihilante*) si l'unique fonction à support dans S et dont la transformée de Fourier est à support dans Σ est la fonction nulle, *i.e.* que pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\operatorname{supp}(f) \subset \mathrm{S} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{spec}(f) \subset \Sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \ = \ 0.$$

— On dit que le couple (S, Σ) forme une *paire fortement annulante* (ou *paire fortement annihilante*) s'il existe une constante $C(\mathrm{S}, \Sigma) > 0$ telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\mathrm{S}, \Sigma)\left(\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d\backslash \mathrm{S})} + \|\widehat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d\backslash \Sigma)}\right).$$

La constante $C(\mathrm{S}, \Sigma)$ est appelée *constante d'annulation* (ou *constante d'annihilation*).

Une première caractérisation des paires fortement annulantes est la suivante :

Proposition 23 (Caractérisation des paires fortement annulantes)**.** *Soient* S *et* Σ *deux parties mesurables de* $\mathbb{R}^d$*. Le couple* (S, Σ) *forme une paire fortement annulante si et seulement s'il existe une constante* $D(\mathrm{S}, \Sigma) > 0$ *telle que pour tout* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant* $\operatorname{spec}(f) \subset \Sigma$ *:*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant D(\mathrm{S}, \Sigma)\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d\backslash \mathrm{S})}.$$

Proposition 24. *Tout couple de paire fortement annulante est une paire faiblement annulante.*

Démonstration. Soit (S, Σ) un couple de paire fortement annulante et $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset \mathrm{S}$ et $\operatorname{spec}(f) \subset \Sigma$. Alors f est nulle sur $\mathbb{R}^d\backslash \mathrm{S}$ et $\widehat{f}$ est nulle sur $\mathbb{R}^d\backslash\Sigma$, d'où : $0 \leqslant \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 0$, *i.e.* $f = 0$. □

Proposition 25. *Si* S *et* Σ *sont des compacts de* $\mathbb{R}^d$*, alors* (S, Σ) *est faiblement annulante.*

Démonstration. On ne traite que le cas $d = 1$. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(f) \subset \mathrm{S}$ et $\operatorname{spec}(f) \subset \Sigma$ et soit $s \in \mathbb{R}^*_+$. On pose $f_s : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{s}} f(\frac{x}{s})$. La norme de f est conservée lors de cette dilatation : $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \|f_s\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$. La transformée de Fourier de f_s est : $\widehat{f_s} : y \longmapsto \sqrt{s}\widehat{f}(sy)$. Par le théorème de Plancherel on a donc :

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \|f_s\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f_s}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Alors :

$$\|\widehat{f_s}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{-R}^{R} s\widehat{f}(sy)^2 \,\mathrm{d}y,$$

où $R > 0$ est tel que $\operatorname{spec}(f) \subset]-R, R[$ (par hypothèse $\operatorname{spec}(f)$ est compact). Par changement de variable on obtient :

$$\|\widehat{f_s}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{-Rs}^{Rs} \widehat{f}(y)^2 \,\mathrm{d}y.$$

Or $f \in L^2(\mathbb{R})$ est à support compact, elle est donc intégrable et $\widehat{f}$ est par conséquent continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\lim_{s\to 0^+} \int_{-Rs}^{Rs} \widehat{f}(y)^2 \,\mathrm{d}y = \lim_{s\to 0^+} \|\widehat{f_s}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Donc $\|\widehat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 0$ et f est nulle dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. □

Remarque. Cette proposition nous assure qu'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ non nulle et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne peuvent pas avoir simultanément un support compact.

La concentration d'une fonction peut être mesurée par la taille de son support. Par la remarque précédente, on se demande alors ce qu'il se passe lorsque l'hypothèse du support compact est remplacé par un ensemble de mesure finie.

Théorème 26 (Benedicks-Amrein-Berthier-Nazarov)**.** *Soient* S *et* Σ *deux parties mesurables de* $\mathbb{R}^d$ *de mesures finies, alors :*

— *(Benedicks) :* (S, Σ) *est faiblement annulante.*
— *(Amrein-Berthier) :* (S, Σ) *est fortement annulante.*
— *(Nazrov,* $d = 1$*) :* $C(\mathrm{S}, \Sigma) \leqslant ce^{c|\mathrm{S}|\,|\Sigma|}$

La version quantitative multidimensionnelle du théorème de Benedicks est celui de Amrein-Berthier.

3.3. Principe d'incertitude relatif aux paires annulantes.

Ici, la concentration d'une fonction est mesurée à l'aide de la taille de son support. Nous avons vu en particulier que pour un couple (S, Σ) de paire fortement annulante, toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vérifie :

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\mathrm{S}, \Sigma)\left(\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{S})} + \|\widehat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}\right).$$

Cette dernière inégalité implique que si f est petit sur $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{S}$ et que $\widehat{f}$ est aussi petit sur $\mathbb{R}^d \setminus \Sigma$, alors f est petit sur $\mathbb{R}^d$ entier. En particulier, si $\operatorname{supp} f \subset \mathrm{S}$ et $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$, alors f est nulle. Ainsi, il est impossible qu'une fonction et sa transformée de Fourier soient toutes les deux concentrées dans une petite région de l'espace.

Par la suite, l'objectif qui se présente naturellement est la recherche de caractérisations de paires annulantes.

3.4. Ensembles épais et déterminés.

Notations. Pour toute partie S de $\mathbb{R}^d$, on note $\widetilde{\mathrm{S}}$ le complémentaire de S dans $\mathbb{R}^d$ ($\widetilde{\mathrm{S}} := \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{S}$). Pour tout ensemble mesurable A de $\mathbb{R}^d$, on désigne par $|\mathrm{A}|$ la mesure de Lebesgue de A.

Ensembles épais.

Définition 8. Soit S une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$. On dit que l'ensemble S est *épais* s'il existe une boule B et une constante $\gamma > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ : \quad |\mathrm{S} \cap (\mathrm{B} + x)| \geqslant \gamma.$$

Dans ce cas, on dit que S est *γ-épais.*

Remarques. — En général on définit un ensemble épais avec un cube $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées au lieu d'une boule B. Cela ne change rien à la définition par équivalence des normes en dimension finie.

— Attention à ne pas confondre les ensembles *épais* et les ensembles *relativement denses* qui eux sont définis par rapport à la mesure de comptage au lieu de la mesure de Lebesgue.

Exemples 4. — Illustrons un exemple d'ensemble épais dans le cas de la dimension 2.

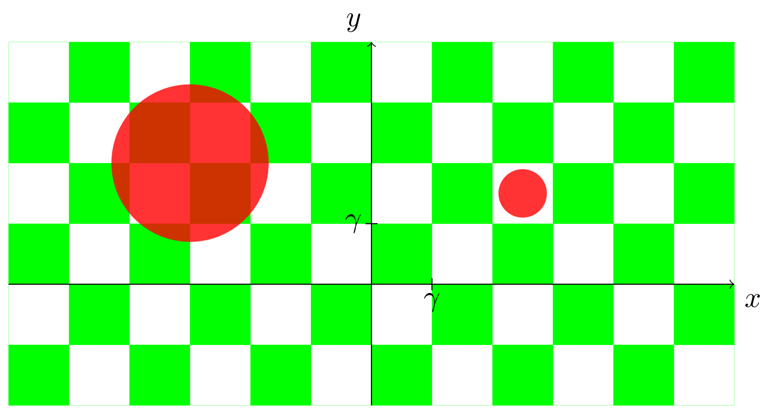

Figure 1 – Exemple d'un ensemble γ-épais S dans le cas $d = 2$.

— *Contre-exemple.* Tout ensemble de mesure de Lebesgue finie est non-épais car tout ensemble épais est de mesure de Lebesgue infinie. Par exemple, $\mathbb{Q}$ n'est pas un ensemble épais.

Mesure Π de Poisson et mesures Π_x associées.

Définition 9 (Mesure de Poisson)**.** On définit la *mesure de Poisson* sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi \;:=\; \frac{1}{\pi(1+x^2)}\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

De plus, on définit des mesures de probabilité liées à celle de Poisson par :

$$\Pi_x(\mathrm{A}) := \Pi(x-\mathrm{A}) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{A}} \frac{1}{1+(x-t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$.

Proposition 27 (Caractérisation des parties épaisses de $\mathbb{R}$)**.** *Soit* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$. *On a :*

$$\mathrm{S} \textit{ est épais} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \Pi_x(\mathrm{S}) \;>\; 0.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$.

" $\Longrightarrow$ " Supposons que S est épais. Alors il existe $\mathrm{K} := \,]-L, L[$ et $\gamma \;>\; 0$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad |\mathrm{S} \cap (\mathrm{K}+x)| \;\geqslant\; \gamma \;>\; 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\Pi_x(\mathrm{S}) \;=\; \int_{\mathrm{S}} \mathrm{d}\Pi_x \;\geqslant\; \int_{\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)} \mathrm{d}\Pi_x \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\int_{x-L}^{x+L} \frac{1}{1+(x-t)^2}\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} \frac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \quad \frac{1}{\pi(1+L^2)}|\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)| \\
&\geqslant \quad \frac{\gamma}{\pi(1+L^2)} \;>\; 0.
\end{aligned}$$

" $\Longleftarrow$ " Supposons que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \Pi_x(\mathrm{S}) \;>\; 0$, alors :

$$\exists\, \sigma > 0,\; \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad \Pi_x(\mathrm{S}) \;\geqslant\; \sigma.$$

On pose $\mathrm{K} := \,]-L, L[$. De ce fait :

$$\begin{aligned}
\pi\sigma \;\leqslant\; \pi\Pi_x(\mathrm{S}) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(x-t)^2}\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \int_{x-L}^{x+L} \frac{1}{1+(x-t)^2}\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{|x-t|>L} \frac{1}{1+(x-t)^2}\mathbb{1}_{\mathrm{S}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \quad |\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)| + 2\int_{L}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \quad |\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)| + 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan L\right).
\end{aligned}$$

Lorsque L est grand, le terme $2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan L\right)$ est très petit au point qu'il soit inférieur à $|\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)|$. On peut alors choisir un L suffisamment grand tel que $|\mathrm{S}\cap(\mathrm{K}+x)| \;\geqslant\; \frac{\pi\sigma}{2}$. □

Ensembles déterminés.

Définition 10. Soient S, Σ deux parties de $\mathbb{R}^d$. On dit que S est Σ-*déterminée* s'il existe une constante $D(\mathrm{S},\Sigma) > 0$ telle que pour toute application $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{spec}\,(f) \subset \Sigma$:

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant D(\mathrm{S},\Sigma)\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{S})}.$$

En particulier, dans le cas où S est Σ-déterminée pour toute partie bornée Σ de $\mathbb{R}^d$, on dit que S est *déterminée.*

Remarque. Le théorème de Logvinenko-Sereda s'exprime de plusieurs manières. En définissant les ensembles déterminés et en soulignant le lien direct qui existe entre ces ensembles et les paires annulantes, nous tentons de clarifier le théorème.

Proposition 28 (Caractérisation des parties Σ-déterminées lorsque Σ est bornée)**.** *Soit* $\mathrm{S},\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ *avec* Σ *bornée. On a :*

$$\mathrm{S} \textit{ est } \Sigma\textit{-déterminée} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\widetilde{\mathrm{S}},\Sigma) \textit{ est fortement annulante.}$$

Démonstration. Ce résultat est clair par la proposition 24. □

Proposition 29. *Soit* S *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^d$*. S'il existe une partie mesurable bornée* Σ *telle que* S *soit* Σ*-déterminée, alors* S *est déterminée.*

Démonstration. Il suffit de changer la constante. □

Corollaire 30. *Soient* S *et* Σ_0 *deux parties mesurables de* $\mathbb{R}^d$*. Si* (S,Σ_0) *est une paire fortement annulante pour un certain sous-ensemble borné* Σ_0*, alors* S *constitue une paire fortement annulante avec tout sous-ensemble borné* Σ *de* $\mathbb{R}^d$*.*

4. Théorème de Logvinenko-Sereda

Notre principal objectif est d'obtenir une caractérisation des paires annulantes. Le théorème que nous allons voir nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple (S, Σ) soit une paire annulante lorsque Σ est une partie bornée.

4.1. Opérateur $\mathscr{P}$ lié à la mesure de Poisson.

Définition 11. On définit l'opérateur $\mathscr{P}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \Pi)$ par :

$$\mathscr{P}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}\Pi_x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \, \mathrm{d}\Pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{1}{1+(t-x)^2} \, \mathrm{d}t,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \Pi)$.

Définition 12 (Classes de Hardy)**.** Soit $p \in \{1, 2\}$. On appelle *classe de Hardy* l'ensemble $\mathcal{H}^p$ définit par :

$$\mathcal{H}^p = \{\varphi \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \ : \ \operatorname{spec}(\varphi) \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Proposition 31 (Propriétés de l'opérateur $\mathscr{P}$)**.** *Soit $p \in \{1, 2\}$. L'opérateur $\mathscr{P}$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Soit $\varphi \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Alors $\mathscr{P}(\varphi)$ est un produit de convolution :

$$\mathscr{P}(\varphi) = \varphi * \kappa \qquad \text{avec} \qquad \kappa : x \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{H}^2$. Alors :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathscr{P}(\varphi)}(y) = e^{-y} \widehat{\varphi}(y).$$

(iii) Soit $\varphi \in \mathcal{H}^2$ de spectre borné. Alors il existe $\ell > 0$ tel que $\operatorname{spec}(\varphi) \subset]0, \ell[$ et :

$$\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leqslant e^{\ell} \|\mathscr{P}(\varphi)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. (i) Trivial.

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{H}^2$. Classiquement, la transformée de Fourier de la loi de Cauchy est l'exponentielle ($i.e.$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\widehat{\kappa}(y) = e^{-y}$). De plus par (i) et par la proposition 6 :

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \ : \quad \widehat{\mathscr{P}(\varphi)}(y) = \widehat{\varphi * \kappa}(y) = \widehat{\varphi}(y) \widehat{\kappa}(y).$$

(iii) Soit $\varphi \in \mathcal{H}^2$ à spectre borné, alors par le point (ii) :

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \ : \quad |\widehat{\varphi}(y)| = e^{y} |\widehat{\mathscr{P}(\varphi)}(y)| \leqslant e^{\ell} |\widehat{\mathscr{P}(\varphi)}(y)|.$$

Ainsi, par le théorème de Plancherel, on obtient le résultat.

□

Proposition 32.

(i) Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \Pi)$. Si $\varphi \geqslant 0$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{P}(\varphi)(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}\Pi(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

En particulier, pour tout ensemble mesurable $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathrm{S}} \varphi \, \mathrm{d}\Pi_x \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{P}(\varphi \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{S}}) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{S}} \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

(ii) Soient $p \in \{1,2\}$ *et* $\varphi \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*. Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{P}(|\varphi|^p) = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^p.$$

(iii) Soit $\varphi \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*. Alors* $\mathscr{P}(\varphi) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *et :*

$$\|\mathscr{P}(\varphi)\|_p \leqslant \|\varphi\|_p.$$

Démonstration. (i) Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (les fonctions étant positives).

(ii) Il suffit d'appliquer le (i).

(iii) Supposons $1 < p < +\infty$ et soit $q := p(p-1)$ le conjugué de p. Soit $\varphi \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Alors en utilisant (ii), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\mathscr{P}(\varphi)(x)|^p &\leqslant \int (\kappa(x-t)|\varphi(t)|^p)^{1/p} (\kappa(x-t))^{1/q} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int \kappa(x-t)|\varphi(t)|^p \, \mathrm{d}t \right) \cdot \left(\int \kappa(x-t) \, \mathrm{d}t \right)^{p/q} = \mathscr{P}(|\varphi|^p)(x). \end{aligned}$$

La preuve est aussi simple pour $p = 1$ ou $+\infty$.

□

Proposition 33. *Soit* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \Pi)$*. On suppose que* φ *est positive. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \ln|\mathscr{P}(\varphi)(x)| \leqslant \mathscr{P}(\ln|\varphi|)(x).$$

Démonstration. On admet cette proposition. Il s'agit d'un raffinement de l'inégalité de Jensen.

□

Proposition 34. *Soit* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$ *un ensemble mesurable. On suppose qu'il existe* $\sigma > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $\Pi_x(\mathrm{S}) \geqslant \sigma$*. Alors pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}^2$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathscr{P}(\varphi)|^2 \leqslant 2 \left(\int_{\mathrm{S}} |\varphi|^2 \right)^{\sigma} \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{2(1-\sigma)}.$$

Démonstration. Si $\sigma = 1$, il suffit de travailler avec $\sigma/2$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\sigma \neq 1$.
Soient $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $x \in \mathbb{R}$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble on pose :

$$k := \Pi_x(\mathrm{S}), \quad \widetilde{k} := \Pi_x(\widetilde{\mathrm{S}}), \quad \lambda(\mathrm{A}) := \frac{\Pi_x(\mathrm{A} \cap \mathrm{S})}{\Pi_x(\mathrm{S})}, \quad \widetilde{\lambda}(\mathrm{A}) := \frac{\Pi_x(\mathrm{A} \cap \widetilde{\mathrm{S}})}{\Pi_x(\widetilde{\mathrm{S}})}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{H}^2$. On suppose donc que $k, \widetilde{k} > 0$ (il n'y a rien à démontrer sinon). On sait que :

$$\ln|\mathscr{P}(\varphi)(x)| \leqslant \mathscr{P}(\ln|\varphi|)(x).$$

De plus par convexité :

$$\begin{aligned} 2\ln|\mathscr{P}(\varphi)(x)| &\leqslant k \int_S \ln|\varphi|^2 \, \mathrm{d}\lambda + \widetilde{k} \int_{\widetilde{S}} \ln|\varphi|^2 \, \mathrm{d}\widetilde{\lambda} \\ &\leqslant k \ln\left(\int_S |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\lambda \right) + \widetilde{k} \ln\left(\int_{\widetilde{S}} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\widetilde{\lambda} \right) \\ &= k \ln\left(\frac{1}{k} \right) + \widetilde{k} \ln\left(\frac{1}{\widetilde{k}} \right) + k \ln\left(\int_S |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Pi_x \right) + \widetilde{k} \left(\int_{\widetilde{S}} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Pi_x \right) \\ &\leqslant \ln(2) + \sigma \ln\left(\int_S |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Pi_x \right) + (k-\sigma) \ln\left(\int_S |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Pi_x \right) + \widetilde{k} \ln\left(\int_{\widetilde{S}} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Pi_x \right). \end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité : $k\ln\left(\frac{1}{k}\right)+(1-k)\ln\left(\frac{1}{1-k}\right)\leqslant\ln(2)$. De plus :

$$\begin{aligned}(k-\sigma)\ln\left(\int_S|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)+\widetilde{k}\ln\left(\int_{\widetilde{S}}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right) &\leqslant (k-\sigma+\widetilde{k})\ln\left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)\\ &= (1-\sigma)\ln\left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$2\ln|\mathscr{P}(\varphi)(x)|\leqslant\ln(2)+\sigma\ln\left(\int_S|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)+(1-\sigma)\ln\left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right).$$

Et donc par croissance de l'exponentielle :

$$|\mathscr{P}(\varphi)(x)|^2\leqslant 2\left(\int_S|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)^{\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)^{(1-\sigma)}.$$

De plus on sait que :

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_S\varphi^2\,\mathrm{d}\Pi_x\right)\mathrm{d}x=\int_S\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec les coefficients $1/\sigma$ et $1/(1-\sigma)$ on obtient finalement :

$$\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{P}(\varphi)|^2\leqslant 2\left(\int_S|\varphi|^2\right)^{\sigma}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{2(1-\sigma)}.$$

□

4.2. **Énoncé et preuve du théorème de Logvinenko-Sereda.**

Théorème 35 (Logvinenko-Sereda)**.** *Soient* S *et* Σ *deux parties mesurables de* $\mathbb{R}^d$*. On suppose que* Σ *est bornée.*

$$(\mathrm{S},\Sigma)\ \textit{est une paire fortement annulante}\quad\Longleftrightarrow\quad\widetilde{\mathrm{S}}\ \textit{est épais.}$$

Remarque. Ce théorème s'énonce de manière équivalente par :

$$\mathrm{S}\text{ est déterminée}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathrm{S}\text{ est épais.}$$

Démonstration. On ne démontre que le cas où $d=1$. Soient S et Σ deux parties mesurables de $\mathbb{R}$ avec Σ est bornée.

" $\Longrightarrow$ " Supposons que (S,Σ) est une paire fortement annulante. D'après la proposition 29, il est équivalent de supposer que $\widetilde{\mathrm{S}}$ est Σ-déterminée.

Soit $f\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{spec}\,(f)\subset\Sigma$. On suppose que f est non nulle et quitte à normaliser f par sa norme sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on suppose que $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}=1$. Alors par hypothèse, comme $\widetilde{\mathrm{S}}$ est Σ-déterminée, il existe une constante $\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)>0$ telle que :

$$\frac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)}\leqslant\|f\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{S})}.$$

(1) Pour $\delta>0$ on pose :

$$\omega_f(\delta)=\sup\left\{\int_{\mathrm{A}}|f|^2\ ,\ \mathrm{A}\subset\mathbb{R}:|\mathrm{A}|\leqslant\delta\right\}.$$

En particulier, il est clair que : $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(\delta)=0$.

(2) Soient $h \in \mathbb{R}$ et A un espace mesurable de $\mathbb{R}$. Comme $|A+h| = |A|$, on a alors :

$$\int_{\mathrm{A}} |\tau_h f|^2 \leqslant \omega_f(|\mathrm{A}|).$$

(3) On peut trouver une boule B suffisamment large (donc $\widetilde{\mathrm{B}}$ suffisamment petite) telle que :

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\mathrm{B}})} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)} \quad \text{et par changement de variable : } \quad \forall\, h \in \mathbb{R},\ \|\tau_h f\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\mathrm{B}+h})} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)}.$$

(4) Soit $h \in \mathbb{R}$. Par définition de la Σ-déterminé, les points (2) et (3) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)^2} = \frac{\|\tau_h f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}}{\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)^2} \leqslant \|\tau_h f\|^2_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\mathrm{S}})} &= \int_{\widetilde{\mathrm{S}}\cap(\mathrm{B}+h)} |\tau_h f|^2 + \int_{\widetilde{\mathrm{S}}\cap\widetilde{(\mathrm{B}+h)}} |\tau_h f|^2 \\ &\leqslant \omega_f(|\widetilde{\mathrm{S}}\cap(\mathrm{B}+h)|) + \frac{1}{4\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)^2}.\end{aligned}$$

(5) Donc :

$$\forall\, h \in \mathbb{R} \ : \quad \frac{3}{4\mathrm{D}(\mathrm{S},\Sigma)^2} \leqslant \omega_f(|\widetilde{\mathrm{S}}\cap(\mathrm{B}+h)|).$$

S'il existait un $h \in \mathbb{R}$ tel que $|\widetilde{\mathrm{S}}\cap(\mathrm{B}+h)|$ est nul, on aurait $\omega_f(|\widetilde{\mathrm{S}}\cap(\mathrm{B}+h)|) = 0$. Ceci est absurde par l'inégalité précédente et donc $\widetilde{\mathrm{S}}$ est épais.

" $\Longleftarrow$ " Supposons que $\widetilde{\mathrm{S}}$ est épais. Soit $f \in \mathrm{L}^2$ telle que $\mathrm{spec}\,(f) \subset]a,b[$ et $\ell = b-a$.

(1) Transformons f en une fonction de $\mathcal{H}^2$. On pose $\varphi : x \longmapsto f(x)e^{-iax}$. Alors $\varphi \in \mathcal{H}^2$, $\mathrm{spec}\,(\varphi) \subset]0,\ell[$ et $|\varphi| = |f|$.

(2) Par la propriété (iii) de la proposition 31 :

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 \leqslant e^{2\ell}\|\mathscr{P}(\varphi)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Et comme $\widetilde{S}$ est épais, on obtient par la caractérisation des parties épaisses de $\mathbb{R}$ (proposition 28) :

$$\exists\, \sigma > 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \ : \quad \Pi_x(\widetilde{\mathrm{S}}) \geqslant \sigma.$$

(3) Par la proposition 34, on obtient :

$$\|\mathscr{P}(\varphi)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\left(\int_{\mathrm{S}} |\varphi|^2\right)^{\sigma} \|\varphi\|^{2(1-\sigma)}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 2\left(\int_{\mathrm{S}} |f|^2\right)^{\sigma} \|f\|^{2(1-\sigma)}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

(4) Par (2) et (3), on a $\|f\|^{2\sigma}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leqslant 2e^{2\ell}\left(\int_{\mathrm{S}} |f|^2\right)^{\sigma}$. Alors :

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leqslant (2e^{2\ell})^{1/\sigma} \int_{\mathrm{S}} |f|^2.$$

□

4.3. **Lien avec le principe d'incertitude.**

Le théorème de Logvinenko-Sereda nous donne une caractérisation des paires annulantes lorsque l'une des parties est bornée. On peut alors reformuler le principe d'incertitude relatif aux paires annulantes comme suit.

Si S, Σ sont deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ avec $\widetilde{\mathrm{S}}$ épais et Σ bornée, alors toute application $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vérifie :

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\mathrm{S}, \Sigma) \left(\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{S})} + \|\widehat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)} \right).$$

La prochaine étape est de trouver des informations sur la constante $C(\mathrm{S}, \Sigma)$ afin d'être le plus fin possible. Nous ne faisons qu'énoncer un de ces théorèmes qui nous donne des informations sur la constante :

Théorème 36 (Kovrijkine)**.** *Il existe une constante positive* $\mathrm{C}_d > 0$ *avec* $d > 0$ *telle que* $\widetilde{\mathrm{S}}$ *est* γ*-épais à l'échelle* $L > 0$ *avec* $0 < \gamma \leqslant 1$*. De plus, on a pour tout* $R > 0$ *et pour tout* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *avec* $\operatorname{spec}(f) \subset [-R, R]^d$ *:*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\frac{C_d}{\gamma} \right)^{C_d(1+LR)} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{\mathrm{S}})}.$$

Table des matières

Références

[1] K. Beauchard, P. Jaming, K. Pravda-Starov *Spectral estimates for finite combinations of Hermite functions and null-controllability of hypoelliptic quadratic equations.*

[2] J.M. Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[3] F. De Marcay, *Analyse de Fourier*, https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ merker/Enseignement/Analyse-de-Fourier/fourier-pdflatex.pdf, Département de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, France.

[4] G.B. Folland, A. Sitaram, *The uncertainty principle : A mathematical survey*, The Journal of Fourier Analysis and Applications **3**, 207–238 (1997).

[5] S. Ghobber. *Paires annihilantes en analyse harmonique.* Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Orléans, 2011. Francais. NNT : 2011ORLE2044 . tel-00662694v2

[6] P. Grangier, *Position et vitesse d'une particule quantique.* Chapitre 2 - L'équation de Shrödinger générale. https ://gargantua.polytechnique.fr/siatel-web/app/linkto/mICYYYSJpI5S.

[7] V. Havin, B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **28**, Springer-Verlag, Berlin (1994).

[8] J. Jendrej, *Introduction à l'analyse harmonique.* CNRS et université Sorbonne Paris Nord, 2020.

[9] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Chapitre 9.

Samuel Chan-ashing, ENS Rennes, 35000 Rennes, France
Adresse e-mail : samuel.chan-ashing@ens-rennes.fr

Bastien Lecluse, ENS Rennes, 35000 Rennes, France
Adresse e-mail : bastien.lecluse@ens-rennes.fr